

Université Hassan II - Mohammedia, Casablanca
 F.S.T. Mohammedia
 Département de Mathématiques
 Filière d'Ingénieur IMIAE
 Concours d'accès à la première année
 Épreuve d'Algèbre. Durée : 2 heures.
 11 Juillet 2012

On considère l'espace vectoriel $E = \mathbb{R}^3$ et f l'endomorphisme de E dont la matrice dans la base canonique $\mathcal{B} = \{\vec{e}_1, \vec{e}_2, \vec{e}_3\}$ est la matrice A :

$$A = \begin{pmatrix} 3 & -2 & 3 \\ 1 & 0 & 2 \\ 0 & 0 & 2 \end{pmatrix}$$

I. Calcul des puissances de A .

- 1) Déterminer les valeurs propres λ_1 et λ_2 de l'endomorphisme f , avec $\lambda_1 < \lambda_2$.
- 2) La matrice A est-elle inversible ? (On ne demande pas le calcul de la matrice A^{-1}).
- 3) Déterminer une base et la dimension de chacun des sous-espaces propres de f .
- 4) Justifier que f n'est pas diagonalisable.
- 5) Déterminer le vecteur \vec{u}_1 de E vérifiant :
 - . \vec{u}_1 est un vecteur propre de f associé à la valeur propre λ_1 .
 - . La première composante de \vec{u}_1 est 1.
- 6) Déterminer le vecteur \vec{u}_2 de E vérifiant :
 - . \vec{u}_2 est un vecteur propre de f associé à la valeur propre λ_2 .
 - . La deuxième composante de \vec{u}_2 est 1.
- 7) Soit $\vec{u}_3 = (1, 1, 1)$. Montrer que $\mathcal{F} = \{\vec{u}_1, \vec{u}_2, \vec{u}_3\}$ est une base de E .
- 8) Déterminer la matrice de passage P de la base \mathcal{B} dans la base \mathcal{F} puis la matrice de passage de la base \mathcal{F} dans la base \mathcal{B} .
- 9) Montrer que : $f(\vec{u}_3) = \vec{u}_2 + 2\vec{u}_3$.
- 10) En déduire que la matrice de f dans la base \mathcal{F} est la matrice :

$$T = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 1 \\ 0 & 0 & 2 \end{pmatrix}$$

- 11) Rappeler la relation matricielle entre A et T .
- 12) Prouver que pour tout élément n de \mathbb{N}^* , il existe un réel α_n tel que :

$$T^n = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 2^n & \alpha_n \\ 0 & 0 & 2^n \end{pmatrix}$$

On donnera le réel α_1 ainsi qu'une relation entre α_{n+1} et α_n .

13) Montrer que :

$$\forall n \in \mathbb{N}^*, \quad \alpha_n = n! 2^{n-1}$$

En déduire l'écriture matricielle de A^n en fonction de n .

II. Matrices commutant avec A .

$M_3(\mathbb{R})$ désignant l'ensemble des matrices carrées d'ordre 3, on considère le sous-ensemble $C(A)$ de $M_3(\mathbb{R})$ des matrices M telles que :

$$AM = MA$$

1) Montrer que $C(A)$ est un sous-espace vectoriel de $M_3(\mathbb{R})$.

2) Pour M appartenant à $M_3(\mathbb{R})$, on pose $M' = P^{-1}MP$. Montrer que :

$$AM = MA \iff TM' = M'T$$

(T est définie dans la question I. 10).

3) Montrer qu'une matrice M' de $M_3(\mathbb{R})$ vérifie $TM' = M'T$ si et seulement si M' est

de la forme $\begin{pmatrix} a & 0 & 0 \\ 0 & b & c \\ 0 & 0 & b \end{pmatrix}$ où a, b, c sont trois réels.

4) En déduire que M appartient à $C(A)$ si et seulement s'il existe des réels a, b, c tels que :

$$M = \begin{pmatrix} -a + 2b & 2a - 2b & -a + b + 2c \\ -a + b & 2a - b & -a + b + c \\ 0 & 0 & b \end{pmatrix}$$

5) Déterminer alors une base de $C(A)$ ainsi que la dimension de $C(A)$.

• - - - - • - - - - • - - - - • - - - - •